

**Czy liczba π zasługuje na swoje
święto?**

Historia, znaczenie i własności liczby π

- Święto liczby π ustalono na 14 marca (Data 14 marca w USA jest zapisywana jako 3.14.rok). W 2009 r uchwala Izby Reprezentantów - oficjalne święto w USA.
- W Europie są też zwolennicy święta w dniu 22 lipca (Związane to jest ze znanym przybliżeniem liczby π jako ułamek $22/7$)
- Przybliżenie $22/7=3,14285714$ wyznaczył Archimedes (287-212 p.n.e) obliczając sumy długości boków 96-kątów foremnych (jeden opisany na kole a drugi wpisany w koło) i biorąc jako długość okręgu wartość średnią z obu sum (tylko dwie cyfry po przecinku są poprawne)

- Właściwie Archimedes oszacował wartość π jako wartość pomiędzy 3 i $10/71$ a 3 i $1/7$ (prawie ograniczenie to właśnie $22/7$)

- W Starym Testamencie w drugiej księdze kronik jest następujący fragment tekstu:

Następnie sporządził odlew okrągłego "morza" o średnicy dziesięciu łokci, o wysokości pięciu łokci i o obwodzie trzydziestu łokci

Twórcy Starego Testamentu przyjmowali więc, że obwód jest trzy razy dłuższy niż średnica.

- W III wieku naszej ery chiński matematyk **Liu Hui** stosując metodę Archimedesesa dla wielokąta o liczbie boków równej 3072 wyznaczył wartość liczby π jako 3.1415 (poprawna wartość 3.14159265)

- Holender **Ludolf van Ceulen** poświęcił całe życie na wyznaczenie wartości liczby π . W 1596 roku podał wartość π z dokładnością do 20 miejsc po przecinku, w 1610 roku (rok śmierci) podał wartość π z dokładnością 35 miejsc po przecinku. (Ludolfina - od imienia Ceulena)
- Symbol π został wprowadzony w 1706 roku przez Walijczyka **Wiliama Jonesa** i jest to pierwsza litera greckiego słowa περιμετρον (perimetron) co znaczy obwód. Spopularyzował ten symbol **Leonhard Euler** w wydany w 1737 roku dziele *Analiza*
- W 2016 roku **Peter Treub** uzyskał dokładność 22,5 biliona cyfr po przecinku. Obliczenia trwały na superkomputerze 105 dni a zapis wyniku zajął 120 terabajtów przestrzeni dyskowej.

- Przybliżenia liczby π podawane przez uczonych na przestrzeni wieków

Babilończycy (około 2000 r p.n.e.) $\pi \approx 3$

Egipcjanie (około 2000 r p.n.e.) $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,160493$

Klaudiusz Ptolemeusz (II wiek n.e.)

$$\pi \approx 3 + 8/60 + 3/360 \approx 3,1416$$

Leonardo Fibbonacci (XIII wiek), $\pi \approx 864/275 = 3,14181818$

Gottfried Wilhelm Leibnitz (XVII wiek), $\frac{\pi}{4} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7, ..$

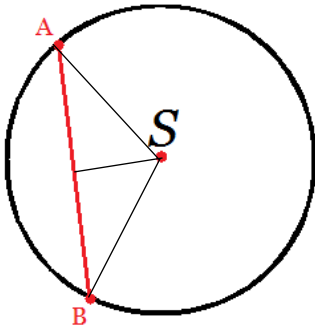
Leonhard Euler (XVIII wiek) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ..$

- Liczba π wyraża stosunek długości okręgu i średnicy tego okręgu na płaszczyźnie euklidesowej (Na powierzchniach zakrzywionych wartość tego stosunku jest różna od π).

Jak dziś możemy oszacować wartość liczby π ?

Metoda oparta na idei Archimedesesa

Na rysunku łatwo zauważyć, że cięciwa AB jest krótsza niż łuk (krótszy) wyznaczony przez położenie punktów A i B. Kąt ASB można zmniejszać powodując, że różnica długości cięciwy AB i łuku AB będzie się zmniejszać. Dla małych kątów otrzymamy wielokąt o wielu bokach wpisany w okrąg.



Długość obwodu wpisanego wielokąta przy zwiększającej się liczbie boków różni się od obwodu okręgu o coraz mniejszą wartość.

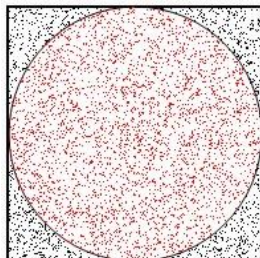
Suma długości wszystkich boków jest przybliżeniem długości okręgu koła opisanego na tym wielokącie. Jeśli poprowadzimy prostą ze środka wielokąta do środka jednego z boków, to powstanie trójkąt prostokątny, w którym $x/r = \sin(\alpha/2)$, gdzie x to połowa długości cięciwy a α to kąt środkowy oparty na łuku odpowiadającym cięciwie. Wynika z tego, że obwód wielokąta można obliczyć jako:

$$Obwód = 2n \sin(\alpha/2)$$

gdzie: n to liczba boków wielokąta. np. dla $n = 10000000$ mamy kąt α równy $360/10000000$ stopni.

Czyli: $\text{Obwód} = 20000000 * \sin(360 / 20000000) =$
6.28318530716925. Dzieląc tą wartość przez średnicę
(przyjeliśmy $r=1$) czyli 2 otrzymujemy wartość $\pi = \mathbf{3.141\ 592\ 653}$
584 625. Cyfry pogrubione są dokładne.

Metoda oparta za zasadzie Monte Carlo



Metoda Monte Carlo polega na losowaniu punktów z określonego obszaru i zliczaniu tych, które znalazły się wewnątrz interesującej nas figury. Jeśli liczba wszystkich wylosowanych punktów to N , a liczba zaliczonych do figury n , to oszacowanie pola

figury jest określone wzorem: $\text{Pole figury} = \frac{n}{N} S$ gdzie: S to pole (znane) figury ograniczającej.

Jeżeli przyjmiemy, że koło ma środek w początku układu i promień równy 1, to możemy się ograniczyć do losowania

punktów o współrzędnych z przedziału $[0, 1]$ dla x i y . Poniżej kod programu Maxima:

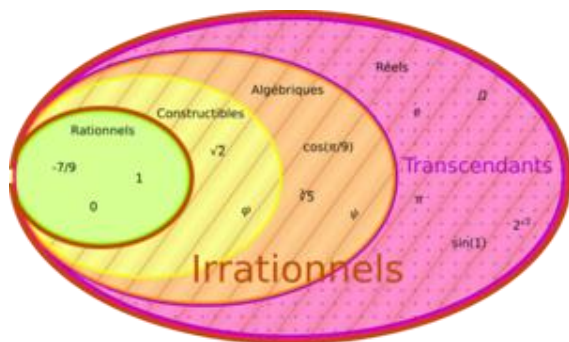
```
/* Obliczenie Pi z ćwiartki koła metodą MC */
N:1000000$
n:0$
for k:1 thru N do
(
    x:random(1.0),
    y:random(1.0),
    if y < sqrt(1-x^2) then n:n+1
)$
Pi:4*n/N,numer$
print("Liczba Pi:", Pi)$
```

Przykładowy wynik dla $N=1000000$: Liczba π : **3.141 256**.

Fakty i własności dotyczące liczby π

- Liczba π jest **niewymierna** to znaczy, że nie można jej przedstawić jako ułamka a/b dla a i b będących liczbami całkowitymi.
- Liczba π jest liczbą **przestępną** to znaczy, że nie istnieje wielomian o wymiernych współczynnikach, którego π byłoby pierwiastkiem. (liczby, które nie są przestępne nazywamy liczbami **algebraicznymi**; np. $\sqrt[2]{2}$ jest liczbą algebraiczną, bo jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 2 = 0$)

- Euler podał związek pomiędzy trzema ważnymi w matematyce liczbami: π , e i jednostce urojonej i . Związek podany przez Eulera jest następujący: $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- Liczba e jest podstawą logarytmów naturalnych. Jest też ona granicą ciągu nieskończonego postaci $(1 + 1/n)^n$.
Jednostka urojona i ma następujące własności:
 $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, itd.

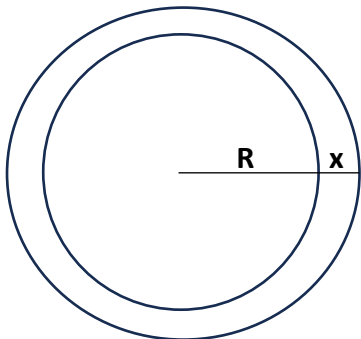


Podział zbioru liczb rzeczywistych.
 liczby wymierne,
 liczby konstruowalne,
 liczby algebraiczne,
 liczby przestępne.

(https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Liczba_przestępna)

- Zbiór liczb **algebraicznych** jest przeliczalny. (Zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny a każdy taki wielomian ma skończoną liczbę pierwiastków)
- Zbiór liczb **przestępnych** nie jest przeliczalny, ponieważ zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny a zbiór liczb **algebraicznych** jest przeliczalny.
- Liczby **konstruowalne** odpowiadają odcinkom, które można skonstruować używając tylko linijki (bez podziałki) i cyrkla.
- Liczby **konstruowalne** to wszystkie liczby, które można otrzymać z liczby 1 za pomocą działań dodawania, odejmowania, mnożenia dzielenia i wyciągania pierwiastka kwadratowego

- Wszystkie liczby **wymierne** są **konstruowalne** a wszystkie liczby **konstruowalne** są **algebraiczne**.
- **Przeliczalność** zbioru oznacza jego równoliczność ze zbiorem liczb naturalnych.
Równoliczność należy rozumieć tak, że istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne i "na" z jednego zbioru do drugiego. Inaczej mówiąc: zbiór jest przeliczalny, jeśli jego elementy da się ponumerować liczbami naturalnymi.
- Zbiór jest **nieprzeliczalny**, jeśli nie jest przeliczalny.
np. zbiór liczb niewymiernych, zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb przestępnych.



Mniejszy okrąg oznacza równik kuli ziemskiej, zaznaczono promień R .

Większy okrąg oznacza koło, którego obwód jest o 10 metrów dłuższy niż obwód kuli ziemskiej. Literą x oznaczono odstęp, między okręgiem równika Ziemi a okręgiem równika Ziemi do długości którego dodano 10 metrów.

Niech każdy się zastanowi (ale nie oblicza) jaką wartość ma x .

Obliczenie

$$2\pi R + 10 = 2\pi(R + x)$$

$$2\pi R + 10 = 2\pi R + 2\pi x$$

Zatem: $2\pi x = 10$ skąd otrzymujemy:

$$x = \frac{10}{2\pi} \text{ (w przybliżeniu } 1,59 \text{ m).}$$

Zaskakuje fakt, że wartość zmiennej x nie zależy od promienia kuli R .

Zatem podobny eksperyment myślowy dotyczy kuli o dowolnym promieniu R

Występowanie liczby π

W geometrii

πr^2 - pole koła o promieniu r ,

$2\pi r$ - obwód okręgu o promieniu r ,

$ab\pi$ - pole elipsy o półosiach równych a i b ,

$\frac{4}{3}\pi r^3$ - objętość kuli o promieniu r ,

$4\pi r^2$ - powierzchnia kuli o promieniu r ,

$\pi r^2 H$ - objętość walca o wysokości H i promieniu podstawy r ,

$\frac{1}{3}\pi r^2 H$ - objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy r ,

W analizie matematycznej

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - \text{pole pod krzywą rozkładu normalnego},$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \text{jest to wartość funkcji } \arctg x \text{ dla } x = 1,$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \text{pole półkola jednostkowego o środku w punkcie } (0, 0),$$

W teorii liczb

Prawdopodobieństwo tego, że dwie wylosowane liczby całkowite są względnie pierwsze jest równe $\frac{6}{\pi^2}$,

Średnia liczba sposobów na zapisanie liczby naturalnej jako sumy kwadratów liczb naturalnych jest równa $\frac{\pi}{4}$,

W fizyce

$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ - zasada nieoznaczoności Heisenberga,

$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ - równanie pola grawitacyjnego w ogólnej teorii względności

Dziękuję za uwagę